EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BUDA VIRÁG – PRINS REBECCA

BIZONYÍTÁSOK A MATEMATIKA TANÁRSZAKOS HALLGATÓK KÖRÉBEN

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

Herbert és mtsai (2015) szerint a bizonyítás központi szerepet tölt be a matematika oktatásában, és mind az oktatókat, mind a hallgatókat komoly kihívások elé állítja, különösen a bevezető kurzusokon. Amellett, hogy a tananyag új fogalmakkal, definíciókkal és tételekkel van nehezítve, a bizonyítás folyamata sok diák számára továbbra is jelentős akadályt jelent.

Ez a dolgozat az *Algebra és Számelmélet* kurzusok alatt felmerülő bizonyításokkal és feladatmegoldásokkal kapcsolatos hibákkal, hiányosságokkal foglalkozik. Arra törekszik, hogy feltárja, hogyan érzékelik a diákok a matematikai bizonyítás bonyolultságát és hogyan navigálnak benne. A kutatást vezérlő átfogó kérdés a következő: Hogyan látják a diákok az algebrai bizonyítást, valamint teljes feladatmegoldást és észreveszik-e a hiányosság és a teljesség közti árnyalatokat?

A matematikaoktatásban a bizonyítással kapcsolatos, egyre terjedő kutatások ellenére a tanárszakosok körében a bizonyítással foglalkozó átfogó tanulmányok továbbra is ritkák. Ez a dolgozat e hiányosság pótlásához járul hozzá azzal, hogy megvizsgálja egy 54 negyedéves egyetemi hallgatóból álló csoport meglátásait hallgatók által beadott bizonyítások és feladatmegoldások helyességét, teljességét. A dolgozat a diákok megoldásainak kulcsfontosságú lépéseit vizsgálja, feltárva a bizonyítás megértéséről, a bizonyítás céljairól és a bizonyítások hatékony kommunikációjának módjáról alkotott nézeteiket.

A bizonyításokkal kapcsolatos interakciók három nagy területre terjednek ki: a bizonyítások konstruálására, a bizonyítások javítása és a bizonyítások megtanulása/megértésére (Tall és mtsai, 2012). A tanulóknak az elméleti szempontok, különösen a bizonyítás megragadásában jelentkező kihívások a korábbi oktatási tapasztalatoknak tulajdoníthatók, amelyek a képleteket a fogalmi megértéssel szemben előnyben részesíthetik. Stewart & O.J. Thomas (2019) azt javasolja, hogy a lineáris algebrai bizonyításnak természetes módon kell fejlődnie a kurzuson belül, kiemelve Harel (2013, 2018) ajánlásait a diákok aktív részvételére, a bizonyítások intuícióra való építésére, a bizonyításolvasás ösztönzésére és a bizonyítás teljeskörű megértésének hangsúlyozására. Ez alapján az általunk vizsgált diákoknak már rendelkezniük kell a bizonyítások kompetenciáival.

2. KÍSÉRLET ELŐKÉSZÍTÉSE

A bizonyítási képesség kompetenciákra épül. Mi ebben a dolgozatban három különböző bizonyítási kompetenciát különböztetünk meg: a bizonyítás értését, a bizonyítás javítását és a bizonyítás készítését. De hogyan lehet eldönteni mikor a helyes egy feladatmegoldás és mikor teljes egy bizonyítás? Több kutató is egyetért abban, hogy ehhez előzetesen egy keretrendszert kell meghatározni, ami alapján tudatosan értékeljük ki a feladatokat. Ezek természetesen tantárgy és matematikai terület specifikusak, sőt még az életkort és korábbi tapasztalatot is figyelembe kell venni az összeállításnál. Így mi is elengedhetetlennek tartottuk, hogy rendelkezzünk egy saját rendszerrel. Ezért összegyűjtöttük a legjellemzőbb, leggyakoribb hibatípusokat és ezeket hat főkategóriába soroltuk, ez adta az útmutatónk alapját. A főkategóriák az alábbiak: nem odatartozó információ, hiányos végeredmény, hiányos indoklás, hibás indoklás, leírási hiba, matematikai hiba.

Elsőnek külön kategóriába szedtük a matematikai pontatlanságokat, elszámolásokat. Ezek nem elvi hibák, akár véletlenül is bekerülhetnek a megoldásba, ezeket nevezzük matematikai hibának. Emellé még a leírási problémákat választottuk nem elvi hibának, amibe például egy olyan bizonyítás tartozik, amiben a lépések nem megfelelő logikai sorrendben követik egymást. Ez a két kategória zömmel kisebb hiányosságokat tartamaznak, nem súlyos elvi tévedéseket.

A többi hibalehetőséget négy alpontra szedtük: nem odatartozó információ, hiányos végeredmény, hiányos indoklás és hibás indoklás. A nem odatartozó információ leírásánál például megkülönböztettük a témába vágó, de nem szükséges információkat: ilyen mikor a diákok a primitív egységgyökök rendjének meghatározásakor a nem primitív egységgyökök rendjeit is kiszámolják; és az egyáltalán nem témába vágókat, például egy permutációs bizonyítás/feladatmegoldás során a Lagrange-tétel alkalmazása. Ehhez gyengén kapcsolódik a nem teljes, hiányos végeredmény is. Ez gyakran fordult elő lineáris kongruenciarendszerek megoldásának megadásakor. Az utolsó két kategória az indoklások minőségével foglalkozik. Elsőként a hiányos indoklást vizsgáltuk, ezeket úgy határoztuk meg, hogy ezek azok a feladatok, amiket további indoklással ki lehetne helyesen egészíteni teljes megoldássá. Megkülönböztettük a kategórián belül a lépések átugrását, ezen belül is, hogy az átugrásokat követően olvasható-e még a megoldás vagy sem (értelmezhető-e vagy nem az olvasó/javító számára); a feltételek nem ellenőrzését, és a nem minden eset megvizsgálatát. Utóbbi a nem teljes végeredménnyel is kapcsolatban van, de egy erős elvi hibának tekintendő, valamint egy feladat teljes megoldása egy indoklási folyamat, így mindenképp külön kategóriába kell sorolni. Ha a megoldás nem egészíthető ki teljessé, hanem hallgató megoldásától különböző módon kell indokolni, akkor hibás indoklásról beszélünk. Pontosabban ez lehet hamis feltevés vagy rossz definícióból való kiindulás, ilyen például a felsorolásoknál fordulhat elő. Ennek durvább változata, amikor a hallgató konkrét példákból fogalmaz meg általánosítást és ezt tekinti teljes, helyes bizonyításnak pl. 24, 56, 264, 1392 mind olyan számok, amik 2-vel, 4-gyel és 8-cal is oszthatóak, tehát egy szám osztható 8-cal, ha osztható 2-vel és 4-gyel. Ezen kívül jellemzően a hibás megfordítás fordult elő: mikor a hallgatók arra a következtetésre jutottak, hogy negyed- és magasabb fokú polinom irreducibilis, ha a racionális gyökteszt segítségével belátható, hogy nincs racionális gyöke. Végezetül pedig a bizonyítandó állítás felhasználását: felvételiben/érettségiben sokszor szereplő bizonyítsuk be hogy a szög adott nagyságú az szöget feladatban a tanuló abból indul ki, hogy mekkora az adott szög; vagy éppen a nem bizonyított állítás használatát vettük külön.

3. A KÍSÉRLET FELÉPÍTÉSE

3.1 Előzmények

A kísérletünkben 31 hallgató vesz részt önkéntes alapon. Ők mind az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanárszakosok számára meghirdetett Algebra és számelmélet 5 (mmt5t1al7g) kurzusra járnak, melyet összesen 54 hallgató vett fel ebben a félévben (2023/2024/1). Ők az egyetemi tanulmányaik kezdete óta rendszeresen bizonyítanak az algebra kurzusokon. Ezek az algebra kurzusok mind játékosítva voltak, félévente eltérő módon, más keretek között.

A mintatanterv szerint az Algebra és számelmélet 5 a kurzushoz előfeltételül szolgáló Algebra és számelmélet 1 kurzus 2020. szeptemberében indult el. Ebben a félévben a jegyszerzés pontrendszer alapú volt. A hallgatók megajánlott jegyet szerezhettek, ha teljesítettek bizonyos minimum követelményeket és mellette egy előre meghatározott pontszámot elértek. Ez számszerűen azt jelentette, hogy minden bizonyításra 6 pontot lehetett kapni, ha az teljes volt és ezekből 12 volt a félév során. A 12 teljesíthető bizonyításból legalább 6, legalább 5 pontos bizonyítást kellett írni, ami azt jelentette, hogy a hallgató csak nagyon apró hibát véthet, elvi hiba nem kerülhetett a bizonyításba. Ezek a hetente beadható bizonyítások az előadás során elhangzottak, így az előadáson részt vevők könnyített helyzetben voltak. Ezen kívül előre meghatározott szakirodalmak segítették még a hallgatók munkáját.

Az Algebra és számelmélet 2 kurzus kitűző rendszerben zajlott. Azok a tanulók kaphattak megajánlott jegyet, akik legalább 12 kitűzőt összegyűjtöttek. Kitűzőt úgy szerezhetett egy hallgató, hogy ha 3 hibátlan bizonyítást beadott. A bizonyítások továbbra is elhangzottak az előadásokon, valamint a szakirodalmakat továbbra is lehetett használni. Hibátlan bizonyításnak az minősült, amiben nem volt elvi hiba, maximum kisebb elszámolás szerepelhetett benne. A hallgatói visszajelzésekből kiderült, hogy a kitűzőrendszer nem igazán közkedvelt.

A hallgatói visszajelzéseknek eleget téve, az Algebra és számelmélet 3 és 4 kurzusok ismét pontszerre épültek. Továbbra is bizonyításokat és feladatmegoldásokat kellett leadni heti rendszerességgel. A bizonyításokra maximum 6 pontot lehetett kapni, ahol 6 pontot ért egy teljes bizonyítás, 5 pontot egy apróbb hibákat tartalmazó. 3 vagy 4 pontot ért egy hiányos bizonyítás a hiányosság mértékétől függően és 1 vagy 2 pontot ért az, amiben csak helyes részgondolat szerepelt. A hallgatók számára segítségként továbbra is adott volt az előadás és az előre egyeztett szakirodalom. Ezen felül az Algebra és számelmélet 3 és 4 kurzusok sajátossága volt, hogy hallgatói javítócsoportok alakultak. A javítócsoportok egy beosztás alapján egy-egy hét bizonyításait és feladatait értékelték. Ez persze nem azt jelentette, hogy mindenki a legjobb barátjának megadta a teljes pontszámot, hanem elkészítettek egy előzetes javítási változatot, melyet aztán javításfelelősök véglegesítettek a gyakorlatvezetőkkel egyeztetve. Így a diákok nem csak a bizonyítási készségeiket fejleszthették, hanem a bizonyítás olvasási/értési és javítási képességeiket is. Ez jövendőbeli tanárként a szakmai fejlődéshez is fontos.

Az Algebra és számelmélet 5 kurzuson továbbra is a pontrendszer van érvényben. A heti bizonyítások helyett ebben a félévben 7 darab emlékeztető dolgozat került megírásra. Ezek az előző félévek fontosabb tételeit idézik fel és az ott megszerzett tudást kérik számon. Emellett változatlanul heti rendszerességgel, de más formátumban fennmaradtak a beadható feladatok is. Ezek a feladatok most már inkább tekinthetők bizonyításnak, mintsem egy számolási feladatnak. Minden beadható feladatnál részletesen kell indokolni és teljes pontszámot csak az a hallgató kaphat, aki igényesen meg is indokolja a megoldását. Emiatt ebben a félévben mind a beadható feladatokra, mind az emlékeztető dolgozatokra bizonyításként hivatkozunk.

3.2 Felépítés

A kutatásunk miatt ebben a félévben az előadóval egyeztetve abban állapodtunk meg, hogy minden beadott bizonyítást mi ketten javítunk előadói felügyelet mellett. A vállalt szerepkörünk miatt szeptember óta gyűjtöttük és rendszereztük az általunk megalkotott kategóriákba a „szép” -nek vélt, elegánsan hibás bizonyításokat, melyeket az előző félévben beadott bizonyításokkal egészítettünk ki. Ezekből egy anonim feladatbankot készítettünk, amelyet megosztottunk a kísérletben önként résztvevő 31 hallgatótársunkkal. Ez a 31 hallgató megkapta a magunknak kialakított útmutató rövidített, kódolt változatát.

Javítási útmutató:
Az alapvető feladat eldönteni, hogy a megoldások jók vagy rosszak.
Arra kérünk Titeket, hogy 2-3 soronként jelöljétek az alábbi rendszer szerint mi történik.

A) Hibátlan
B) Nem tudom eldönteni, hogy jó vagy rossz, de szerintem...
   1. jó
   2. rossz
C) Itt hiba van.
   1. Hiányos indoklás, de kiegészíthető
   2. Gondolatmenet helyes, de a következtetés hiányos
   3. Nem bizonyított állítást használ
   4. Hamis állítást használ
   5. Hibás megfordítás, következtetés
   6. Példából következtet egy általános szabályra
   7. Nem odatartozó információk szerepelnek

Kérjük, ami javítható hiba/hiány, azt javítsátok is ki.
Mindenki 7 megoldott feladatot kap, de nem kötelező mindet kijavítani.

1. ábra

Az ő feladatuk az volt, hogy minden bizonyításhoz 2-3 soronként odaírják az általuk vélt odatartozó hiba betűjelét, illetve ahol tudják, javítsák ki az észrevett hibákat. Ez a feladat pontszerzési lehetőséget kínált az évfolyamnak, de nagy örömünkre szolgált, hogy nem csak olyanok éltek a lehetőséggel, akiknek továbbra pontokra volt szükségük a megajánlott jegyhez. Elmondásuk szerint azért választották ezt a feladatot, mert szakmai fejlődésük fontos építőkövének tekintik az ellenőrzést és értékelést, mint tanári kompetenciákat.

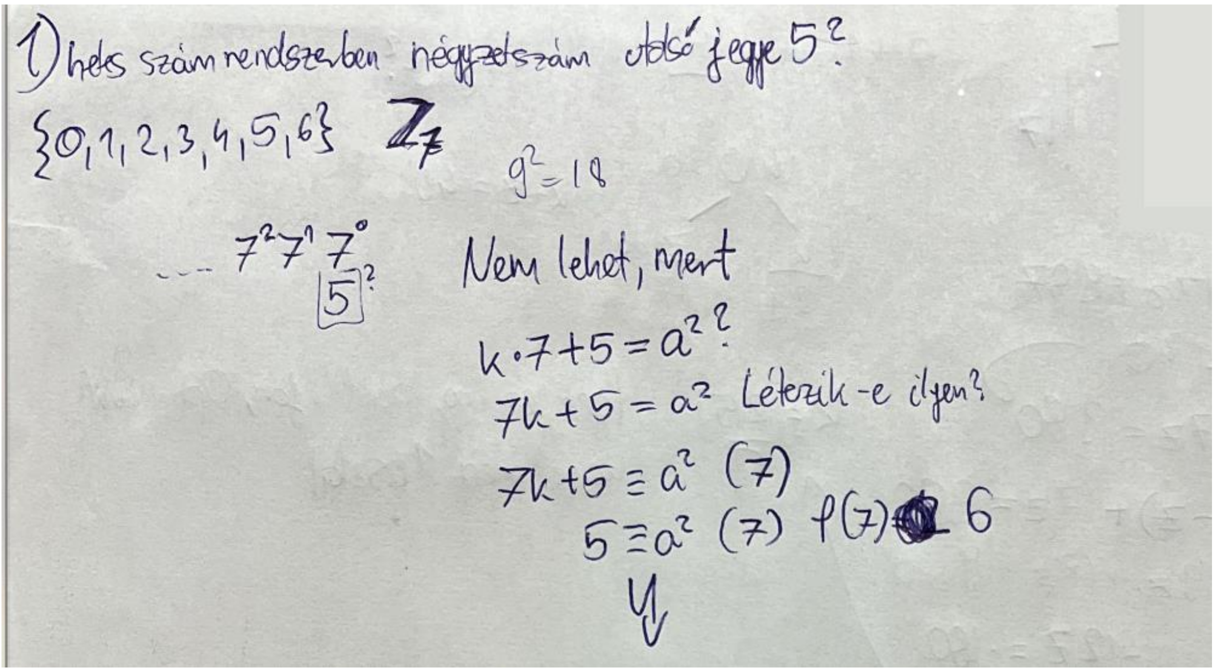
Kiemelt figyelmet fordítottunk az anonimitásra. Ahhoz, hogy hallgatótársaink beadott bizonyításait felhasználhassuk a beleegyezésükre volt szükség. Ezt egy hozzájáruló nyilatkozat kitöltésével tudták nekünk megadni, melynek következményében 37 hallgató bocsátotta rendelkezésünkre megoldott feladatait. A felhasználható feladatok közül egy 25 feladatból álló feladatbankot hoztunk létre. Aki vállalta ezt a fajta pontszerzési lehetőséget, annak 7 megoldást kellett kijavítania a megadott kódokkal. A 7 javítandó közül 4 ajánlott volt, ahol 2-2 lehetőség közül lehetett választani. A maradék 3 értékelendő bizonyítás kiválasztása a hallgatóra volt bízva.

3.3 Hipotézisek

- A bizonyítási készség szorosan összefügg a bizonyítások értésével.
- Azok a tanulók, akik helyesen felismerik, hogy egy bizonyítás hiányos vagy hibás, nem feltétlenül tudják azt javítani vagy kiegészíteni.
- Amennyiben a feladat kiírás szerint hibás megoldásokat kell kijavítani, a tanulók egy része a javítandó feladatok között szereplő teljes bizonyításokban is hibát vél felfedezni.

4. BIZONYÍTÁSOK

A következőkben bemutatunk kettő példát *(2. és 3. ábra)* a hibás bizonyításokra a feladatbankunkból és leírjuk, hogy mi mit gondoltunk ezekben hibáknak. A *1. mellékletben* további példák találhatóak hibás bizonyításokra.



2. ábra

Ebben a bizonyításban a hallgató helyesen felfedezte, hogyha hetes számrendszerben vagyunk, akkor $\mathbb{Z}_7$-ben kell gondolkodni. Jól felírta, hogy ha egy négyzetszám utolsó számjegye 5 lenne, akkor előállna 7k+5 alakban. A kezdeti egyenlete tehát valóban az, amit be szeretnénk bizonyítani, viszont nem indokolta meg, hogy miért ez a kiindulási egyenlet. Innen ismét egy helyes lépés következik, modulo 7 veszi az egyenletet, azonban az indoklás innen is lemaradt. A hallgató utolsó előtti sora még mindig csak a feladat átfogalmazása, nem a megoldása. Ebből nem derül ki mivel van ellentmondásban a felírt összefüggés, vagyis miért nem lehet egy négyzetszám kongruens 5-tel, modulo 7. Emellett nem odatartozó információ is szerepel a bizonyításban, ami a témakörhöz kapcsolódik, azonban ehhez a feladathoz felesleges.

8. A_4: S_4 páros permutációi

$|S_4| = 4! = 24 \Rightarrow |A_4| = \frac{24}{2} = 12$

> az identitás minden részcsoportnak eleme

Lagrange-tétel: Legyen G véges csoport és $H \leq G$. Ekkor $|H| \,\big|\, |G|$.

12 pozitív osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12 ← A_4 részcsoportjainak lehetséges elemszámai

Részcsoporthoz kell:

- zárt szorzásra
- nem üres
- minden elem inverze is eleme

> egy elemen belül (amely diszjunkt ciklusok szorzata) a ciklusok egymás közötti sorrendje nem számít

1 elemszámú részcsoport – 1 ilyen van: $(1)(2)(3)(4)$ ← identitás $\left(\frac{\overset{\text{1. hely}}{\binom{4}{1}} \cdot \overset{\text{2. hely}}{\binom{3}{1}} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{4!}\right)$ ← egymás közötti sorrend

2 elemszámú részcsoport – 3 ilyen van:

$(1)(2)(3)(4), (12)(34)$

$(1)(2)(3)(4), (13)(24)$

$(1)(2)(3)(4), (14)(23)$

$\left(\frac{\binom{4}{2}}{2}\right)$ ← a 4 elemből kiválasztom azt a kettőt, amelyik az első ciklusba kerül

a ciklusok egymás közötti sorrendje nem számít

3 elemszámú részcsoport – 4 ilyen van:
($2 \nmid 3$ – nincs benne másodrendű)

$(1)(2)(3)(4), (123), (132)$

$(1)(2)(3)(4), (134), (143)$

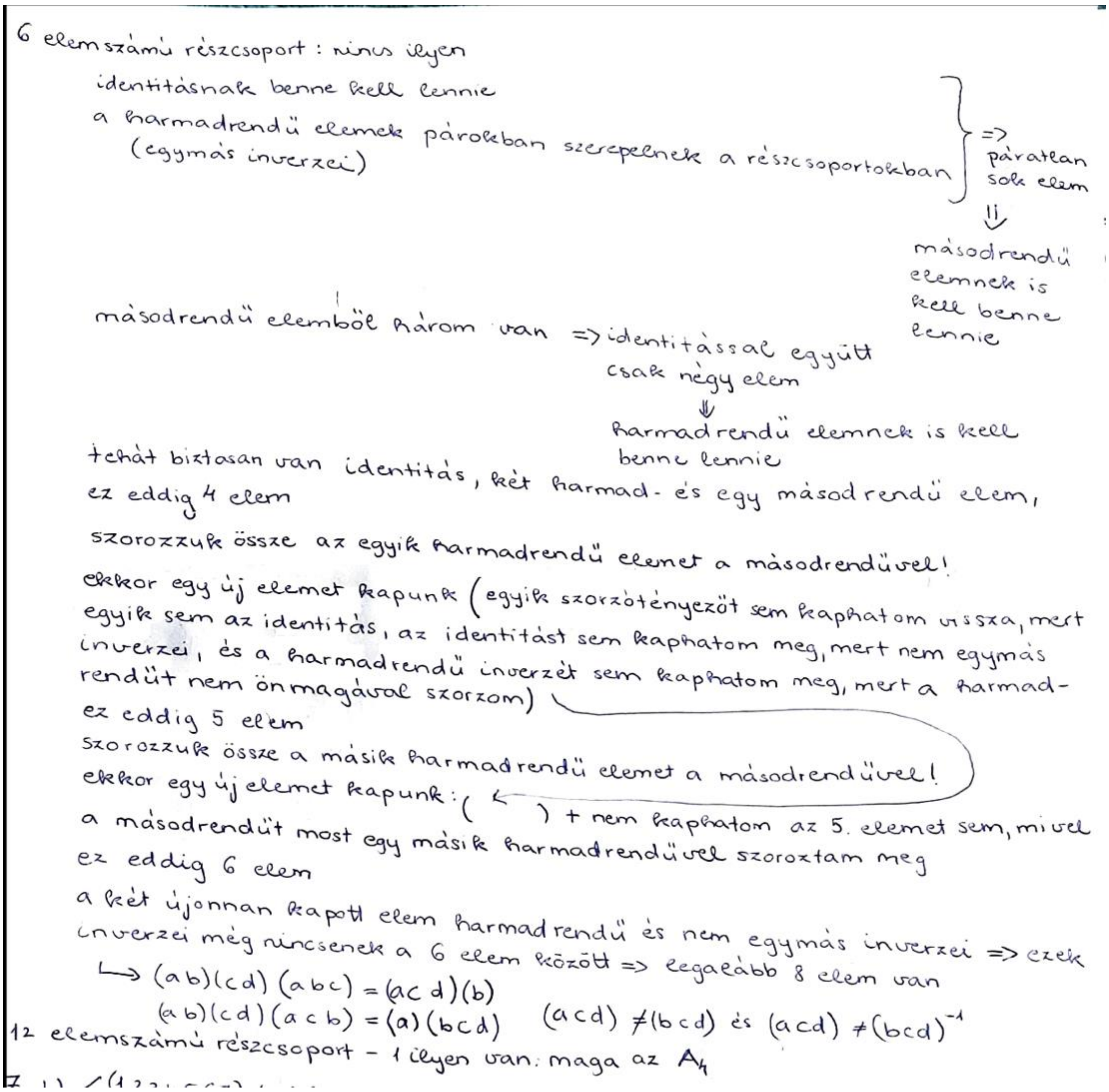
$(1)(2)(3)(4), (124), (142)$

$(1)(2)(3)(4), (234), (243)$

$\left(\binom{4}{3}\right)$ ← a 4 elemből kiválasztok hármat → a másik ciklusba ugyanaz a három elem kerül, tehát azok adottak

4 elemszámú részcsoport – 1 ilyen van: $(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$
($3 \nmid 4$ – nincs benne harmadrendű)

$\left(\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3 \quad \text{ld. 2} \qquad \binom{3}{3} = 1\right)$ ← a 3 lehetséges részcsoport-elemből kiválasztom mind a hármat


6 elemszámú részcsoport : nincs ilyen

identitásnak benne kell lennie

a harmadrendű elemek párokban szerepelnek a részcsoportokban (egymás inverzei) => páratlan sok elem ⇓ másodrendű elemnek is kell benne lennie

másodrendű elemből három van => identitással együtt csak négy elem ⇓ harmadrendű elemnek is kell benne lennie

tehát biztosan van identitás, két harmad- és egy másodrendű elem,

ez eddig 4 elem

szorozzuk össze az egyik harmadrendű elemet a másodrendűvel!

ekkor egy új elemet kapunk (egyik szorzótényezőt sem kaphatom vissza, mert egyik sem az identitás, az identitást sem kaphatom meg, mert nem egymás inverzei, és a harmadrendű inverzét sem kaphatom meg, mert a harmadrendűt nem önmagával szorzom)

ez eddig 5 elem

szorozzuk össze a másik harmadrendű elemet a másodrendűvel!

ekkor egy új elemet kapunk: ( ) + nem kaphatom az 5. elemet sem, mivel a másodrendűt most egy másik harmadrendűvel szoroztam meg

ez eddig 6 elem

a két újonnan kapott elem harmadrendű és nem egymás inverzei => ezek inverzei még nincsenek a 6 elem között => legalább 8 elem van

$\hookrightarrow (ab)(cd)(abc) = (acd)(b)$

$(ab)(cd)(acb) = (a)(bcd) \quad (acd) \neq (bcd)$ és $(acd) \neq (bcd)^{-1}$

12 elemszámú részcsoport – 1 ilyen van: maga az A_4

3. ábra

A hallgató felsorolás szinten elkezdi leírni adott elemszámú részcsoportokat. Ez a felsorolás jó irány, az viszont nem derül ki, hogy létezik-e több. Vegyük észre azt is, hogyha nem S_4-ben, hanem S_6-ban vizsgálnánk ugyanezt a feladatot, akkor már többféleképpen is előállhatnának az egyes elemszámú részcsoportok. A hallgató nem indokolja meg, hogy miért nem állhatnak elő másféleképpen a különböző elemszámú részcsoportok. Ez az egyik fő probléma. Ebben az esetben szerencséje volt a hallgatónak, mert az 1,2,3 elemszámú részcsoportok nem állnak elő másképpen. Nézzük meg a 4 elemszámú esetet! Itt a hallgató nem sorolja fel a négyhosszú ciklust és azt sem indokolja meg, hogy azért nem teszi mert páratlan paritású. Azt sem ellenőrzi, hogy az általa felírt ciklusok valóban részcsoportot alkotnak-e. A 6 elemszámú részcsoport esetében az indoklása mindaddig helyes, hogy „Szorozzuk össze a másik harmadrendű elemet a másodrendűvel!”. Innentől kezdve a zárójeles rész továbbra is teljesül és az is, hogy az 5. elemet sem kaphatom meg. Az viszont nem derül ki, hogy az 5. elem inverzét miért nem. Tehát nem biztos, hogy 6 elemem van. Ha feltételezzük, hogy a másodjára kapott harmadrendű elem valóban nem egyenlő a már meglévő harmadrendű elemünkkel és nem is annak az inverze, akkor teljesülnek a hallgató által felírt szorzások. Ezáltal két újabb harmadrendű elemet és ezek inverzeit tudjuk megnevezni a részcsoporton belül. A betűkkel felírt szorzások megegyeznek a zárójelben leírt magyarázattal. A bizonyításból látszik, hogy a hallgató rendelkezik az alapvető ismeretekkel a témakörből és időt szánt a feladatra. Az is kiderült viszont, hogy a felsorolás nem egy hatékony bizonyítási módszer.

5. TAPASZTALATOK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK

Kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk a tanárszakos hallgatók bizonyítási kompetenciáit. Ezt három fő kategóriába osztottuk: a bizonyítások megtanulása, a bizonyítások készítése és a bizonyítások ellenőrzése. Az elmúlt két félév beadott bizonyításai közül 25 darabot emeltünk ki és arra kértük hallgatótársainkat, hogy egy általunk elkészített kódrendszer alapján ezeket javítsák ki. Minden hallgatónak hét-hét bizonyítást kellett kijavítania és ha tudta, kiegészíteni. A kísérlet során kiderült, hogy a résztvevő hallgatók jelentős többsége, 31 hallgatóból 22, le tudja ellenőrizni a bizonyítások helyességét. Ennek ellenére a 22 hallgatóból csak 13-an tudták helyesen kiegészíteni a hibás bizonyításokat. Emellett kijelenthető, hogy a feltételek ellenőrzése már nem okoz gondot az évfolyamon, hiszen a félév végére 54 hallgatóból már csak 5 esetben fordult elő ez a probléma. Abban az esetben viszont, mikor esetszétválasztások vannak, még mindig gyakori, hogy nem minden esetet vizsgálunk meg. Megfigyelhető, hogy negyedévben még mindig az egyik legjellemzőbb az állítások hibás megfordítása, főként azok körében, akik többedjére veszik fel a tárgyat. Az előző félévekhez képest a példából általánosítás már sokkal kevesebbszer jelentkező probléma. Azok a hallgatók, akik nem járnak előadásra gyakran esnek bele a nem bizonyított állítás használata kategóriába, mert a szakirodalmakra támaszkodnak. Általában címszavak alapján keresnek a meghatározott tankönyvben, így az adott bizonyításhoz sokszor nem kapcsolódó tételek, állítások, lemmák kerülnek leírásra. Tehát esetükben sem a bizonyítás készítése, sem a bizonyítás megtanulása nem teljesül.

Annak ellenére, hogy az évfolyam sok éve bizonyít, még mindig vannak hiányos bizonyítások, pontatlanságok. Azonban sok esetben a hallgatók már úgy gondolják, hogy ha érzik, hogy egy bizonyításuk nem teljes, akkor inkább be sem adják. Viszont előadáson, gyakorlaton sokszor előkerül, hogy egy-egy bizonyítást hogyan kellett volna helyesen megoldani.

7. HIVATKOZÁSOK

Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. Leatham (Ed.), *Vital direction for mathematics education research* (pp. 119–151). New York: Springer.

Harel, G. (2018). Types of epistemological justifications, with particular reference to complex numbers. In J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: an international perspective (pp. 35–49).* Dordrecht: Springer.

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74,* 26-37.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM, 51*, 1069-1082.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 13-49.

MELLÉKLETEK

1. melléklet

4.) $\left|\mathbb{Q}\left(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17}\right) : \mathbb{Q}\right|$

~~testbővítés~~

$\mathbb{Q}\left(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17}\right)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ „együttes" minimálpolinomjának fokszáma $\mathbb{Q}$ fölött

minimálpolinomhoz kell:

egyfőegyütthatós

irreducibilis

gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$

$\sqrt[17]{19} = x$ $\qquad m_{\sqrt[17]{19}}(x) = x^{17} - 19$

$\sqrt[19]{17} = x$ $\qquad m_{\sqrt[19]{17}}(x) = x^{19} - 17$

fokszámok szorzástétele

$(17,19) = 1 \Rightarrow (x^{17}-19)(x^{19}-17)$

a minimálpolinom, ennek foka 36

$\Downarrow$

36 a foka a testbővítésnek

egyfőegyütthatós ✓

gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ ✓

irreducibilis ✓

(Schönemann-Eisenstein)

2.) $z = -2 + 2i$

4.) D_{50}

$H = \langle tf^5, tf^{25}, tf^{37} \rangle$

$tf^5 \cdot tf^{25} = f^{-5}\underbrace{tt}_{id}f^{25} = f^{20}$

$tf^5 \cdot tf^{37} = f^{-5}\underbrace{tt}_{id}f^{37} = f^{32}$

$tf^{25} \cdot tf^{37} = f^{-25}\underbrace{tt}_{id}f^{37} = f^{12}$

$(12, 20, 32, 50) = 2$

$\Rightarrow f^2$ előáll

Pl.: $f^{12}f^{12}f^{12}f^{12} = f^{48} = f^{-2} \Rightarrow f^{-2}$ előáll

Ha f^2 előáll, akkor $f^4, f^6, f^8 \dots f^{\text{páros}}$ is előáll.

$tf^5 f^2 = tf^7$

$tf f^2 = tf^3$

$\Rightarrow$ minden páros előáll, ezért $tf^3, tf^5, tf^7 \dots tf^{\text{páratlan}}$ is előáll, melyekből külön-külön 25 db van. Tehát összesen 50 elem van.

7. ZH

3. $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}$ fölött

a) x^3+2x^2-2x-3

rac gyökteszt: $\frac{k}{l}$ gyök lehet, $k \mid -3$ $l \mid 1$

$\frac{k}{l} \in \{\pm 1, \pm 3\}$

$27+18-3 = 27+15$

$1: -2 \neq 0$

$-1: 0 = 0$ ✓

$3: 36 \neq 0$

$-3: -6 \neq 0$

$-27+18+6-3$

-1 gyöke $\Rightarrow$ $(x+1)$ kiemelhető $\Rightarrow$ nem felbonthatatlan $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}$

b) x^4-3x^3-2x+1

rac. gyökteszt: $\frac{k}{l}$ gyök, ha $k \mid 1$, $l \mid 1$

$\frac{k}{l} \in \{-1, 1\}$

$1: 1-3-2+1 = -3 \neq 0$

$-1: 1-3(-1)-2(-1)+1 = 1+3+2+1 = 7 \neq 0$

Másodfokú irred polinomok $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ felett: x^2+1 és x^2+x+1 (gyakorlatról)

$(x^2+1)(x^2+1) = x^4+2x^2+1$

$(x^2+1)(x^2+x+1) = x^4+x^3+x^2+x^2+x+1 = x^4+x^3+2x^2+x+1$

$(x^2+x+1)(x^2+x+1) = x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x =$

$= x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

Mivel egy negyedfokú polinom vagy egy első- és egy harmadfokú vagy két másodfokú szorzatára bomolhat fel, ezért rac gyöktesztből meg kellett volna kapnom az elsőfokú tagot, tehát max. 2 másodfokú szorzatára lehetne bontani. Ezeknek viszont akkor irednek kéne lennie, mert ha nem azok, akkor elsőfokúra bomlana, amiről már beláttam, hogy nincs. A másodfokú irred polinomokat viszont ismerem, ezeket bárhogy szorozva nem azt kapom, ami nekem kell, vagyis

x^4-3x^3-2x+1 irred.